75.12/95.04 ANÁLISIS NUMÉRICO I
95.10 MODELACIÓN NUMÉRICA
95.13 MÉTODOS MATEMÁTICOS Y NUMÉRICOS
INTERPOLACIÓN - PARTE 1

Ing. Rodolfo A. Schwarz

Facultad de Ingeniería – Universidad de Buenos Aires

Año 2022

INDICE

Introducción

- Supongamos que tenemos esta tabla con datos:

i	x_i	y_i
0	0,314	0,9511
1	0,419	0,9135
2	0,628	0,8090
3	1,257	0,3090

- Esta tabla puede representar los resultados de mediciones o de cálculos.
- Los datos se pueden usar para representar en forma discreta una función.

Introducción

- Una forma de hacer esto es graficar los datos de a tabla:

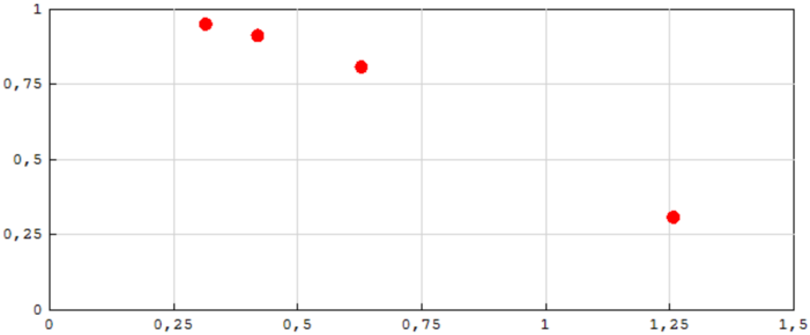

Figura: Gráfico con los valores de la tabla

Introducción

- Con estos datos queremos obtener $f(x)$ para $x = 0{,}500$. ¿Qué podemos hacer?
- Una primera aproximación puede ser construir un segmento de recta entre los dos puntos adyacentes al buscado.
- Así, tenemos la siguiente función:

$$f(x) = 0{,}9135\frac{x - 0{,}628}{0{,}419 - 0{,}628} + 0{,}8090\frac{x - 0{,}419}{0{,}628 - 0{,}419}.$$

- Si hacemos $x = 0{,}500$, resulta:

$$f(0{,}500) = 0{,}9135\frac{0{,}500 - 0{,}628}{0{,}419 - 0{,}628} + 0{,}8090\frac{0{,}500 - 0{,}419}{0{,}628 - 0{,}419}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(0{,}500) = 0{,}8731}.$$

Introducción

- Este es una de las formas más usadas para obtener valores intermedios. Es la **Interpolación Lineal**.
- No siempre los resultados que obtenemos con este método son considerados aceptables.
- Podemos mejorarlos si planteamos esto:

$$
\begin{gathered}
a_0 + a_1\, x_0 + a_2\, {x_0}^2 + \ldots + a_n\, {x_0}^n = y_0 \\
a_0 + a_1\, x_1 + a_2\, {x_1}^2 + \ldots + a_n\, {x_1}^n = y_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_0 + a_1\, x_n + a_2\, {x_n}^2 + \ldots + a_n\, {x_n}^n = y_n
\end{gathered}
$$

- Hemos generado un *Sistema de Ecuaciones Lineales* para un modelo de **Interpolación Polinomial**.

Introducción

- Lo podemos expresar en forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 & \dots & {x_0}^n \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 & \dots & {x_1}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \dots & {x_n}^n \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}$$

- Resolver este sistema lo podemos hacer con algún método que ya hemos visto.
- Un dato acerca de la matriz **A** es que se conoce como *Matriz de VanderMonde*.
- Esta matriz es conocida porque es *mal condicionada*.

Método de Lagrange

- En lugar de resolver un *SEL*, existe una forma simplificada para obtener el **Polinomio Interpolante**.
- Es el **Método de Lagrange Tradicional**, más conocido como **Método de Lagrange**, cuya expresión o fórmula es:

$$L_{k,j}(x) = \prod_{i=0}^{k} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \quad \text{para } j = 0; 1; \ldots; k \quad \text{e} \quad i \neq j,$$

$$P_{k,j}(x) = y_j \cdot L_{k,j}(x),$$

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^{k} P_{k,i}(x) = \sum_{i=0}^{k} y_i \cdot L_{k,i}(x),$$

donde k es el grado del polinomio y la cantidad de puntos es $k+1$.

Método de Lagrange

- Con este método se pueden armar polinomios de diferentes grados:

$$P_0(x),\ P_1(x),\ P_2(x), \ldots,\ P_n(x).$$

- Cada polinomio $P_k(x)$ está formado por $k+1$ polinomios $P_{k,j}(x)$. Así tendremos:

$$P_{1,j}(x) = y_j \cdot L_{1,j}(x) \quad \Rightarrow \quad P_1(x) = \sum_{i=0}^{1} P_{1,j}(x) \quad \text{(dos polinomios)},$$

$$P_{2,j}(x) = y_j \cdot L_{2,j}(x) \quad \Rightarrow \quad P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} P_{2,j}(x) \quad \text{(tres polinomios)},$$

$$P_{n,j}(x) = y_j \cdot L_{n,j}(x) \quad \Rightarrow \quad P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} P_{n,j}(x) \quad \text{(n+1 polinomios)}.$$

Método de Lagrange

- Si aplicamos estas expresiones para los datos originales tendremos los siguientes polinomios de Lagrange:

$$L_{3;0}(x) = \frac{(x-0{,}416)\cdot(x-0{,}628)\cdot(x-1{,}257)}{(0{,}314-0{,}416)\cdot(0{,}314-0{,}628)\cdot(0{,}314-1{,}257)},$$
$$L_{3;1}(x) = \frac{(x-0{,}314)\cdot(x-0{,}628)\cdot(x-1{,}257)}{(0{,}416-0{,}314)\cdot(0{,}416-0{,}628)\cdot(0{,}416-1{,}257)},$$
$$L_{3;2}(x) = \frac{(x-0{,}314)\cdot(x-0{,}416)\cdot(x-1{,}257)}{(0{,}628-0{,}314)\cdot(0{,}628-0{,}416)\cdot(0{,}628-1{,}257)},$$
$$L_{3;3}(x) = \frac{(x-0{,}314)\cdot(x-0{,}416)\cdot(x-0{,}628)}{(1{,}257-0{,}314)\cdot(1{,}257-0{,}416)\cdot(1{,}257-0{,}628)}.$$

Método de Lagrange

- Si aplicamos estas expresiones para los datos originales tendremos los siguientes polinomios de Lagrange:

$$P_{3;0}(x) = y_0 \cdot L_{3;0}(x) = y_0 \cdot \frac{(x-0{,}416)\cdot(x-0{,}628)\cdot(x-1{,}257)}{(0{,}314-0{,}416)\cdot(0{,}314-0{,}628)\cdot(0{,}314-1{,}257)},$$
$$P_{3;1}(x) = y_1 \cdot L_{3;1}(x) = y_1 \cdot \frac{(x-0{,}314)\cdot(x-0{,}628)\cdot(x-1{,}257)}{(0{,}416-0{,}314)\cdot(0{,}416-0{,}628)\cdot(0{,}416-1{,}257)},$$
$$P_{3;2}(x) = y_2 \cdot L_{3;2}(x) = y_2 \cdot \frac{(x-0{,}314)\cdot(x-0{,}416)\cdot(x-1{,}257)}{(0{,}628-0{,}314)\cdot(0{,}628-0{,}416)\cdot(0{,}628-1{,}257)},$$
$$P_{3;3}(x) = y_3 \cdot L_{3;3}(x) = y_3 \cdot \frac{(x-0{,}314)\cdot(x-0{,}416)\cdot(x-0{,}628)}{(1{,}257-0{,}314)\cdot(1{,}257-0{,}416)\cdot(1{,}257-0{,}628)},$$
$$P_3(x) = \sum_{j=0}^{3} P_{3;j}(x) = P_{3;0}(x) + P_{3;1}(x) + P_{3;2}(x) + P_{3;3}(x).$$

Método de Lagrange

- La aproximación inicial es una interpolación por el método de Lagrange tomando sólo dos puntos de los cuatro:

$$
\begin{aligned}
P_{1;0}(x) &= y_0 \cdot L_{1;0}(x) = 0{,}9135 \cdot \frac{x - 0{,}628}{0{,}419 - 0{,}628}, \\
P_{1;1}(x) &= y_0 \cdot L_{1;1}(x) = 0{,}8090 \cdot \frac{x - 0{,}419}{0{,}628 - 0{,}419}, \\
P_1(x) &= P_{1;0}(x) + P_{1;1}(x), \\
&= 0{,}9135 \cdot \frac{x - 0{,}628}{0{,}419 - 0{,}628} + 0{,}8090 \cdot \frac{x - 0{,}419}{0{,}628 - 0{,}419}, \\
P_1(0{,}500) &= 0{,}9135 \cdot \frac{0{,}500 - 0{,}628}{0{,}419 - 0{,}628} + 0{,}8090 \cdot \frac{0{,}500 - 0{,}419}{0{,}628 - 0{,}419}, \\
P_1(0{,}500) &= 0{,}8731.
\end{aligned}
$$

Método de Lagrange

- El grado del polinomio depende de la cantidad de puntos utilizados. Si $k = n$ usamos todos los puntos $(n + 1)$.
- Este método tiene ventajas y desventajas.
- **Ventajas**
  - Es sencillo de entender.
  - No incide la distribución de los puntos.
  - Las operaciones para armar el polinomio no dependen de $f(x_i)$ (o y_i).
- **Desventajas**
  - Requiere $O(n^2)$ operaciones para obtener los polinomios.
  - Se debe recalcular todo si se agregan datos.
  - Es un problema que tiende a ser *mal condicionado* (e inestable).

Método de Newton

- Existe otro método para para obtener el **Polinomio Interpolante**.
- Es el **Método de Newton**.
- La expresión general es:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} F_{i,i} \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j),$$

con

$$F_{i,i} = \frac{F_{i,j-1} - F_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}.$$

Método de Newton

- La expresión matemática para obtener el coeficiente $F_{i,j}$ es:

$$F_{i,j} = f(x_{i-j}, x_{i-j+1}, \ldots, x_i) \quad \text{con} \quad j \leq i,$$

y

$$f(x_{i-j}, x_{i-j+1}, \ldots, x_i) = \frac{f(x_{i-j+1}, x_{i-j+2}, \ldots, x_i) - f(x_{i-j}, x_{i-j+1}, \ldots, x_{i-1})}{x_i - x_{i-j}}.$$

- Por ejemplo, si $i = 2$ y $j = 1$, tenemos:

$$F_{2,1} = f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Método de Newton

- Con esto podemos generar la siguiente tabla:

$\mathbf{i}$	$\mathbf{x_i}$	$\mathbf{f(x_i)}$	$\mathbf{f(x_{i-1}, x_i)}$	$\mathbf{f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i)}$	$\ldots$
0	x_0	$\mathbf{f(x_0)}$			
1	x_1	$f(x_1)$	$\mathbf{f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}$		
2	x_2	$f(x_2)$	$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	$\mathbf{f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)}{x_2-x_0}}$	
3	x_3	$f(x_3)$	$f(x_2, x_3) = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$	$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2,x_3)-f(x_1,x_2)}{x_3-x_1}$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

- Con esta tabla, el **Polinomio Interpolante** resulta ser:

$$\boxed{P_k(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1) \cdot (x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \ldots},$$

con k, grado del polinomio.

Método de Newton

- Esta forma de generar el polinomio, ordenando los datos en orden creciente de i, se conoce como **Método de las Diferencias Divididas Progresivas de Newton**.
- La cantidad de términos depende del grado del polinomio, que a su vez depende de la cantidad de puntos.
- Así, si usamos dos puntos, tenemos:

$$P_1(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1) \cdot (x - x_0) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0),$$

con $k = 1$.

- Con tres puntos:

$$P_2(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1) \cdot (x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1),$$

con $k = 2$.

Método de Newton

- Otra forma de generar la tabla es la siguiente:

i	$\mathbf{x_i}$	$\mathbf{f(x_i)}$	$\mathbf{f(x_i, x_{i+1})}$	$\mathbf{f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})}$	$\ldots$
n	x_n	$\mathbf{f(x_n)}$			
$n-1$	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$\mathbf{f(x_{n-1}, x_n)}$		
$n-2$	x_{n-2}	$f(x_{n-2})$	$f(x_{n-2}, x_{n-1})$	$\mathbf{f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)}$	
$n-3$	x_{n-3}	$f(x_{n-3})$	$f(x_{n-3}, x_{n-2})$	$f(x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1})$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

- Con esta tabla, el **Polinomio Interpolante** resulta ser:

$$P_k(x) = f(x_n) + f(x_{n-1}, x_n) \cdot (x - x_n) + f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \cdot (x - x_n) \cdot (x - x_{n-1}) + \ldots,$$

con k, grado del polinomio.

Método de Newton

- Esta forma de generar el polinomio, ordenando los datos en orden creciente de i, se conoce como **Método de las Diferencias Divididas Regresivas de Newton**.
- La cantidad de términos depende del grado del polinomio, que a su vez depende de la cantidad de puntos.
- Así, si usamos dos puntos, tenemos:

$$P_1(x) = f(x_n) + f(x_{n-1}, x_n) \cdot (x - x_n) = y_n + \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n),$$

  con $k = 1$.
- Con tres puntos:

$$P_2(x) = f(x_n) + f(x_{n-1}, x_n) \cdot (x - x_n) + f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \cdot (x - x_n) \cdot (x - x_{n-1}),$$

  con $k = 2$.

Método de Newton

- Nuevamente, el grado del polinomio depende de la cantidad de puntos utilizados.
- Este método tiene ventajas y desventajas.
- **Ventajas**
    - Requiere solamente $O(n)$ operaciones para obtener los polinomios.
    - Es numéricamente más estable que el **Método de Lagrange** para k relativamente chicos.
    - No requiere recalcular todo si se agregan datos en orden.
- **Desventajas**
    - Depende de $f(x_i)$.
    - Depende del ordenamiento de los datos.
    - También tiende a ser *mal condicionado*.
    - Y si k es muy grande, puede volverse inestable.

Método de Lagrange Baricéntrico

- Supongamos que definimos el polinomio $L_k(x)$ con la siguiente expresión:

$$L_k(x) = \prod_{i=0}^{k} (x - x_i),$$

donde k es el grado del polinomio.

- Definamos, a continuación, un coeficiente que llamaremos *peso baricéntrico*, que está dado por:

$$w_j = \frac{1}{\displaystyle\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{k} (x_j - x_i)}.$$

Método de Lagrange Baricéntrico

- Para armar el polinomio $L_k, j(x)$ según el **Método de Lagrange** tradicional, debemos hacer:

$$L_{k,j}(x) = L_k(x)\frac{w_j}{x - x_j}.$$

- En consecuencia, el polinomio completo tiene la forma:

$$P_{k,j}(x) = y_j \cdot L_{k,j}(x) \;\Rightarrow$$

$$P_k(x) = L_k(x) \cdot \sum_{j=0}^{k} \frac{y_j \cdot w_j}{x - x_j}.$$

- Esta forma de obtener el polinomio completo se suele denominar como **Método de Lagrange Modificado**.

Método de Lagrange Baricéntrico

- La expresión anterior todavía no es la definitiva. Se puede mejorar y conseguir que además sea estable. Supongamos que ahora interpolamos la función constante 1, entonces:

$$1 = \sum_{j=0}^{k} L_{k,j}(x) = L_k(x) \cdot \sum_{j=0}^{k} \frac{w_j}{x - x_j}$$

- Dividamos la primera expresión por la última hallada:

$$P_k(x) = \frac{L_k(x) \cdot \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \frac{y_j \cdot w_j}{x - x_j}}{L_k(x) \cdot \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \frac{w_j}{x - x_j}} \Rightarrow \boxed{P_k(x) = \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{k} \frac{y_j \cdot w_j}{x - x_j}}{\displaystyle\sum_{j=0}^{k} \frac{w_j}{x - x_j}}}.$$

- Esta expresión se conoce como **Método de Lagrange Baricéntico**.

Método de Lagrange Baricéntrico

- Al igual que el método tradicional, el grado del polinomio depende de la cantidad de puntos utilizados.
- **Ventajas**
  - Es sencillo de entender.
  - No incide la distribución de los puntos.
  - Las operaciones para armar el polinomio no dependen de $f(x_i)$ (o y_i).
  - Requiere $O(n)$ operaciones para actualizar los polinomios.
  - Es más estable que los otros métodos.
  - No se debe recalcular todo si se agregan datos.
- **Desventajas**
  - Requiere $O(n^2)$ operaciones para obtener los polinomios.
  - Se mantiene la tendencia a ser *mal condicionado* en polinomios de grado alto.

Fenómeno de Runge

- Supongamos que tenemos esta otra tabla con datos:

i	x_i	y_i
0	0,000	0,500
1	1,000	0,933
2	2,000	0,067
3	3,000	0,500
4	4,000	0,933
5	5,000	0,067
6	6,000	0,500
7	7,000	0,933
8	8,000	0,067
9	9,000	0,500
10	10,000	0,933

Fenómeno de Runge

- Una forma de hacer esto es graficar los datos de a tabla:

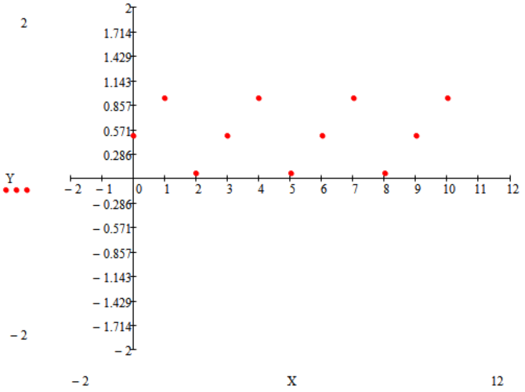

Figura: Gráfico con los valores de la tabla.

Fenómeno de Runge

- Si interpolamos mediante el **Método de Lagrange** obtenemos lo siguiente:

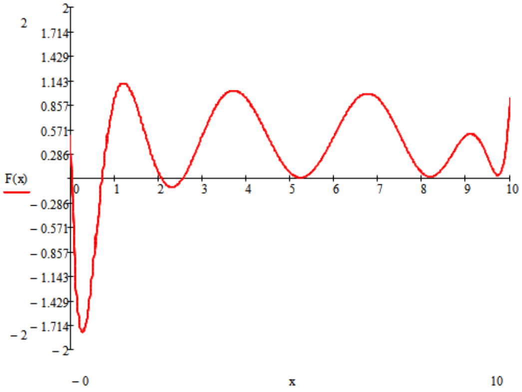

Figura: Interpolación.

Fenómeno de Runge

- Podemos suponer una mejor aproximación:

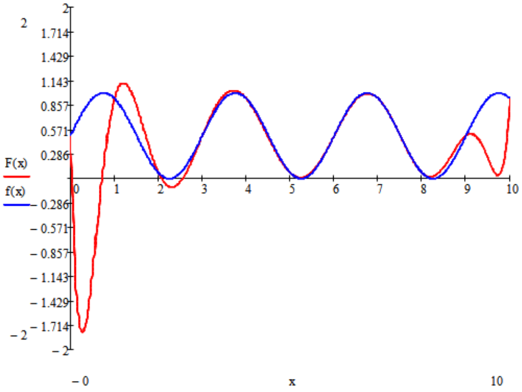

Figura: Interpolación más aproximada (curva azul).

Fenómeno de Runge

- Hay diferencias en los extremos de las curvas interpolantes.
- Esto se conoce como «**Fenómeno de Runge**».
- Se produce para polinomios de grado alto (n>4; 5) y **distribución uniforme** $(x_{i+1} - x_i = h)$.
- ¿Cómo evitar este fenómeno?
- Analizaremos un tipo de interpolación polinomial que evite esto.

Trazadores Cúbicos («Splines»)

- Primero, planteemos un conjunto de polinomios con esta característica:

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3.$$

- Segundo, deben cumplir lo siguiente:

$$\begin{aligned}
S_j(x_j) = f(x_j) = y_j \quad &\rightarrow \quad \text{El polinomio «pasa» por el punto dato.}\\
S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1}) \quad &\rightarrow \quad \text{Los polinomios son continuos.}\\
S'_j(x_{j+1}) = S'_{j+1}(x_{j+1}) \quad &\rightarrow \quad \text{Las primeras derivadas son continuas.}\\
S''_j(x_{j+1}) = S''_{j+1}(x_{j+1}) \quad &\rightarrow \quad \text{Las segundas derivadas son continuas.}
\end{aligned}$$

- Tercero, hay que agregar condiciones en los extremos.

Trazadores Cúbicos («Splines»)

- Dos casos principales:
  1. Frontera natural (o libre):
  $$S_0''(x_0) = S_n''(x_n) = 0.$$
  2. Frontera condicionada (o sujeta):
  $$S_0'(x_0) = f'(x_0) = \alpha \quad \wedge \quad S_n'(x_n) = f'(x_n) = \beta.$$
- Variantes:
  1. Derivadas nulas en los extremos:
  $$S_0'(x_0) = S_n'(x_n) = 0.$$
  2. Derivadas segundas no nulas:
  $$S_0''(x_0) = f''(x_0) = \gamma \quad \wedge \quad S_n''(x_n) = f''(x_n) = \delta.$$

Trazadores Cúbicos («Splines»)

- Por la continuidad de los polinomios tenemos:

$$S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1}).$$

- Entonces:

$$a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1} - x_j)^3 = a_{j+1}.$$

- Si $x_{j+1} - x_j = h_j$, nos queda:

$$a_j + b_j \cdot h_j + c_j \cdot {h_j}^2 + d_j \cdot {h_j}^3 = a_{j+1}.$$

Trazadores Cúbicos («Splines»)

- Por la continuidad de la primera derivada de los polinomios tenemos:

$$S'_j(x_{j+1}) = S'_{j+1}(x_{j+1}).$$

- Entonces:

$$b_j + 2 \cdot c_j(x_{j+1} - x_j) + 3 \cdot d_j(x_{j+1} - x_j)^2 = a_{j+1}.$$

- Como $x_{j+1} - x_j = h_j$, nos queda:

$$b_j + 2 \cdot c_j \cdot h_j + 3 \cdot d_j \cdot {h_j}^2 = b_{j+1}.$$

Trazadores Cúbicos («Splines»)

- Finalmente, por la continuidad de la segunda derivadatenemos:

$$S''_j(x_{j+1}) = S''_{j+1}(x_{j+1}).$$

- Entonces:

$$2 \cdot c_j + 6 \cdot d_j(x_{j+1} - x_j) = 2 \cdot c_{j+1} \;\Rightarrow\; 2 \cdot c_j + 6 \cdot d_j \cdot h_j = 2 \cdot c_{j+1}.$$

- Si despejamos d_j, obtenemos:

$$d_j = \frac{c_{j+1} - c_j}{3 \cdot h_j}$$

Trazadores Cúbicos («Splines»)

- Ahora reemplacemos d_j en las ecuaciones anteriores:

$$a_j + b_j \cdot h_j + c_j \cdot {h_j}^2 + \frac{c_{j+1} - c_j}{3} \cdot {h_j}^2 = a_{j+1},$$
$$a_j + b_j \cdot h_j + \frac{2 \cdot c_j + c_{j+1}}{3} \cdot {h_j}^2 = a_{j+1},$$

y

$$b_j + 2 \cdot c_j \cdot h_j + (c_{j+1} - c_j) \cdot h_j = b_{j+1},$$
$$b_j + (c_j + c_{j+1}) \cdot h_j = b_{j+1}.$$

Trazadores Cúbicos («Splines»)

- Con la última podemos definir b_j en función de b_{j-1}:

$$b_j = b_{j-1} + (c_{j-1} + c_j) \cdot h_{j-1}.$$

- Además tenemos que:

$$b_j = \frac{a_{j+1} - a_j}{h_j} - \frac{2 \cdot c_j + c_{j+1}}{3} \cdot h_j.$$

- Con esta ecuación también podemos definir b_{j-1}:

$$b_{j-1} = \frac{a_j - a_{j-1}}{h_{j-1}} - \frac{2 \cdot c_{j-1} + c_j}{3} \cdot h_{j-1}.$$

Trazadores Cúbicos («Splines»)

- Si igualamos las dos ecuaciones de b_j tenemmos:

$$\frac{a_{j+1}-a_j}{h_j}-\frac{2\cdot c_j+c_{j+1}}{3}\cdot h_j=b_{j-1}+(c_{j-1}+c_j)\cdot h_{j-1}.$$

- Si despejamos b_{j-1} nos queda:

$$b_{j-1}=\frac{a_{j+1}-a_j}{h_j}-\frac{2\cdot c_j+c_{j+1}}{3}\cdot h_j-(c_{j-1}+c_j)\cdot h_{j-1}.$$

- Si igualamos las dos ecuaciones de b_j nos queda:

$$\frac{a_j-a_{j-1}}{h_{j-1}}-\frac{2\cdot c_{j-1}+c_j}{3}\cdot h_{j-1}=\frac{a_{j+1}-a_j}{h_j}-\frac{2\cdot c_j+c_{j+1}}{3}\cdot h_j-(c_{j-1}+c_j)\cdot h_{j-1}.$$

Trazadores Cúbicos («Splines»)

- Si reordenamos la ecuación, nos queda:

$$(c_{j-1}+c_j)\cdot h_{j-1}+\frac{2\cdot c_j+c_{j+1}}{3}\cdot h_j-\frac{2\cdot c_{j-1}+c_j}{3}\cdot h_{j-1}=\frac{a_{j+1}-a_j}{h_j}-\frac{a_j-a_{j-1}}{h_{j-1}}.$$

- Si ahora reagrupamos todo, nos queda:

$$h_{j-1}\cdot c_{j-1}+2(h_{j-1}+h_j)\cdot c_j+h_j\cdot c_{j+1}=3\left(\frac{a_{j+1}-a_j}{h_j}-\frac{a_j-a_{j-1}}{h_{j-1}}\right).$$

- Por definición tenemos que:

$$a_{j+1}=f(x_{j+1}),\ a_j=f(x_j)\text{ y }a_{j-1}=f(x_{j-1}).$$

Trazadores Cúbicos («Splines»)

- Como los valores iniciales son h_0 y c_0 y los finales son h_{n-1} y c_n, podemos generar $n-1$ ecuaciones lineales:

$$h_0 \cdot c_0 + 2(h_0 + h_1) \cdot c_1 + h_1 \cdot c_2 = 3\left(\frac{a_2 - a_1}{h_1} - \frac{a_1 - a_0}{h_0}\right),$$
$$h_1 \cdot c_1 + 2(h_1 + h_2) \cdot c_2 + h_2 \cdot c_3 = 3\left(\frac{a_3 - a_2}{h_2} - \frac{a_2 - a_1}{h_1}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$h_{n-2} \cdot c_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1}) \cdot c_{n-1} + h_{n-1} \cdot c_n = 3\left(\frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{h_{n-2}}\right).$$

- Tenemos $n-1$ ecuaciones lineales y $n+1$ incógnitas (c_0, c_1,..., c_n).

Trazadores Cúbicos («Splines»)

- Para resolver el sistema, agregamos dos ecuaciones según el caso:
  1. Frontera natural:
  $$c_0 = 0 \text{ y } c_n = 0,$$
  2. Frontera sujeta:
  $$2 \cdot h_0 \cdot c_0 + h_0 \cdot c_1 = 3\left(\frac{a_1 - a_0}{h_0} - f'(x_0)\right),$$
  $$h_{n-1} \cdot c_{n-1} + 2 \cdot h_{n-1} \cdot c_n = 3\left(f'(x_n) - \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}}\right),$$
- Con estas dos ecuaciones por caso podemos generar dos *Sistemas de Ecuaciones Lineales* expresadas como: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{B}$.

Trazadores Cúbicos («Splines»)

- Matriz $\mathbf{A}$ para **Trazadores Cúbicos** con *Frontera natural*:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & h_{n-3} & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} & 0 \\ \vdots & & & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trazadores Cúbicos («Splines»)

- Vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{B}$ para **Trazadores Cúbicos** con *Frontera natural*:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3\left(\frac{a_2-a_1}{h_1} - \frac{a_1-a_0}{h_0}\right) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 3\left(\frac{a_n-a_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{a_{n-1}-a_{n-2}}{h_{n-2}}\right) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Trazadores Cúbicos («Splines»)

- Matriz $\mathbf{A}$ para **Trazadores Cúbicos** con *Frontera sujeta*:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2\,h_0 & h_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & h_{n-1} & 2\,h_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Trazadores Cúbicos («Splines»)

- Vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{B}$ para **Trazadores Cúbicos** con *Frontera sujeta*:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3\left(\frac{a_1-a_0}{h_0} - f'(x_0)\right) \\ 3\left(\frac{a_2-a_1}{h_1} - \frac{a_1-a_0}{h_0}\right) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 3\left(\frac{a_n-a_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{a_{n-1}-a_{n-2}}{h_{n-2}}\right) \\ 3\left(f'(x_n) - \frac{a_n-a_{n-1}}{h_{n-1}}\right) \end{bmatrix}.$$

Trazadores Cúbicos («Splines»)

- Existe otra forma de definir los polinomios $S_j(x)$:

$$S_j(x) = \frac{d_{j+1}}{6\,h_j}(x - x_j)^3 + \frac{d_j}{6\,h_j}(x_{j+1} - x)^3 + \left(\frac{y_j}{h_j} - \frac{d_j\,h_j}{6}\right)(x_{j+1} - x) + \\ + \left(\frac{y_{j+1}}{h_j} - \frac{d_{j+1}\,h_j}{6}\right)(x - x_j).$$

- Con esta otra forma, y luego de operar algebraicamente con las mismas condiciones impuestas, la ecuación general es:

$$h_{j-1}\,d_{j-1} + 2\,(h_{j-1} + h_j)\,d_j + h_j\,d_{j+1} = 6\left(\frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_{j-1}}\right),$$

y también se obtienen dos *Sistemas de Ecuaciones Lineales*: para *Frontera natural o libre* y para *Frontera sujeta*.

Bibliografía

- Burden, R. L., Faires, J. D. & Burden, A. M.
  Análisis Numérico.
  Décima Edición. CENGAGE Learning, 2016.
- Cooley, J. W. & Tukey. J. W.
  An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series.
  Mathematics of Computation. American Mathematical Society, 1965.
- Trefethen, L. N. & Berrut, J. P.
  Barycentric Lagrange Interpolation.
  2004.
- Higham, N. J.
  The numerical stability of Barycentric Lagrange Interpolation.
  IMA. 2004.